UFR MATHÉMATIQUES — UNIVERSITÉ RENNES 1
Master Mathématiques / FHFS — 2020/2021

Equations différentielles 1

Exercice [Equations d'Euler]
Soient c_1 et c_2 deux nombres complexes. Donner une base de solutions de l'équation suivante :

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+c_1z\frac{du}{dz}+c_2u=0$$

Vous pouvez chercher les solutions sous la forme z^α et s'il en manque une $z^\alpha\log z$.

Pour comprendre cet méthode, je vous propose une correction (plus difficile) utilisant les polynomes d'endomorphismes. Notre équation se réécrit $(z\frac{d}{dz})(z\frac{d}{dz})u+(c_1-1)(z\frac{d}{dz})u+u=0$.

Commençons par remarquer que cette équation a deux singularités dans $\hat{\mathbf{C}}$. L'une en $z=0$ (du moins tant que c_1,c_2 sont non nuls) et l'autre en ∞. Nous resolverons donc l'equation sur un domaine simplement connexe $U\subset\mathbf{C}^*$ afin de pouvoir utiliser le log (et donc les puissancesnon entières). On vérifie que c'est z^α est un vecteur propre de $z\frac{d}{dz}$ de valeurs propre α : $z\frac{d}{dz}(z^\alpha)=\alpha(z^\alpha)$.

Notre équation s'écrie $P(z\frac{d}{dz})(u)=0$ avec $P(X)=X^2+(c_1-1)X+c_2$ ainsi en restriction à l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions, P est un polynome annulateur de $z\frac{d}{dz}$. Si les deux racines α_1 et α_2 de P sont des valeurs propres distinctes alors $z\frac{d}{dz}$ est diagonalisable : on a une base de solutions $z^{\alpha_1},z^{\alpha_2}$.

Si $z\frac{d}{dz}$ n'est pas diagonalisable alors nous savons qu'il existe un vecteur propre (donc une solution de l'équation de la forme z^α) qu'on peut compléter en une base de telle sorte que la matrice de $z\frac{d}{dz}$ dans cette base soit un bloc de Jordan de diagonal α : puis que $z\frac{d}{dz}(\ln z)=1$ et $z\frac{d}{dz}(z^\alpha\ln z)=z\frac{d}{dz}(z^\alpha)\ln z+z^\alpha z\frac{d}{dz}(\ln z)$, $z^\alpha\ln z$ est le second vecteur de la base.

Remarque 1. *Je profite de cet exemple pour vous monter comment effectuer le changement de variable $w=\frac{1}{z}$. Nous avons alors $\frac{d}{dz}=-w^2\frac{d}{dw}$, ceci signifie que pour si $\tilde{u}(w)=u(1/w)$ alors $\frac{du}{dz}(1/w)=-w^2\frac{d\tilde{u}}{dw}(w)$ (j'oublierai volontier le tilde). Ainsi notre équation dans la nouvelle coordonnée est*

$$(1/w)^2(-w^2\frac{d}{dw})(-w^2\frac{d}{dw})u+c_1(1/w)(-w^2\frac{d}{dw})u+c_2u=0$$

c'est-à-dire

$$w^2\frac{d^2u}{dw^2}-(c_1-2)w\frac{d}{dw})u+c_2u=0.$$

Cette équation est bien singulière en $w=0$ (i.e. $z=\infty$) du moins tant que $c_1\neq 2$ ou $c_2\neq 0$.

Exercice [Seconde solution]
Si u_1 est une solution (non nulle) de

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p\frac{du}{dz}+qu=0$$

et ω une solution (non nulle) de $\frac{dW}{dz}+pW=0$ alors $u_2=u_1\int\frac{\omega}{u_1^2}dz$ est une solution de notre équation, indépendante de u_1.

Si $u_1(z)$ est une solution, on cherche la seconde sous la forme $k(z)u_1(z)$ (variation de la constante). On injecte cette forme dans l'équation et on obtient

$$k''(z)u_1+2k'(z)u_1'(z)+p(z)k'(z)u_1(z)=0$$

Ceci se réécrit $k''/k'=-2u_1'/u_1-p$ ce qui montre que k' est le produit d'une solution de $f'/f=-2u_1'/u_1$ et d'une solution de $g'/g=-p$.

Exercice[Changement de variable, changement d'inconnue]
Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p\frac{du}{dz} + qu = 0$$

Montrer que

1. si $z = g(w)$ et $v = u \circ g$ alors $$\frac{d^2v}{dw^2} + (p \circ gg' - \frac{g''}{g'})\frac{dv}{dw} + (q \circ gg'^2)v = 0$$
   On a $\frac{dw}{dz}\frac{d}{dw}v = \frac{d}{dz}u$ *i.e.* $g'(w)\frac{dv}{dw}(w) = \frac{du}{dz}(g(w))$ et de même $(\frac{dw}{dz}\frac{d}{dw})(\frac{dw}{dz}\frac{d}{dw})v = \frac{d^2}{dz^2}u$.
   Nous composons l'équation avec g puis on remplace les dérivées de u évaluées en g par les dérivées de v suivant les deux formules bleues ci-dessus.
2. si $u = hv$ (produit), en notant $f = \frac{h'}{h}$, alors $$\frac{d^2v}{dz^2} + (p+2f)\frac{dv}{dz} + (q + pf + f' + f^2)v = 0$$
   Après avoir corrigé les typos, il suffit de dériver les fonctions composées.

Exercice[Différentes formes d'une équation d'ordre deux]
Considérons u_1 et u_2 une base de solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p\frac{du}{dz} + qu = 0$$

Vérifiez que

1. $\frac{u_1'}{u_1}$ est solution d'une équation de Riccati.
2. $\tau = \frac{u_2}{u_1}$ est solution d'une équation Schwarzienne : $S(\tau) = -p' - \frac{1}{2}p^2 + 2q.$

   il n'y a que du calcul

Exercice[Lamé & Weierstrass]
Soient $Q(z) = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$ un polynome de degré 3 ayant trois racines distinctes telles que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{C}$. Considérons l'équation de Lamé

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}\frac{du}{dz} - \frac{n(n+1)z+b}{Q}u = 0$$

1. Donner, pour chaque singularités (dans $\hat{\mathbf{C}}$) de l'équation, son type et ses exposants.

   Nous n'avons pas encore vu en cours les différents types de singularités. Nous nous contenterons de déterminer les singularités. Les trois zéros de Q sont des pôles des coefficients. ce sont donc trois singularités. Reste à voir si ∞ est une singularitÃ©. Nous faisons le changement de variable $w = \frac{1}{z}$:

   $$(w^4\frac{d^2}{dw^2} + 2w^3\frac{d}{dw})\tilde{u}(w) + \frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}(1/w)(-w^2\frac{d}{dw})\tilde{u}(w) + \frac{n(n+1)1/w+b}{Q(1/w)}\tilde{u} = 0$$

   Par exemple $w^4Q(1/w) = w\prod(1-e_iw)$ a un zéro simple, le coefficient de $\tilde{u}$, une fois l'équation mise sous forme résolue à un pole d'ordre 2, ou 1 si $n = 0$. ∞ est une singularité
2. Effectuer le changement de variable $z = \wp(w)$.
   On nous propose un autre changement de variable. La fonction $\wp(w)$ est solution de $(\frac{d\wp}{dw})^2 = Q(\wp)$. Nous supposerons que ce Q est associé à une fonction de Weierstrass. C'est toujours le cas mais la preuve n'a pas été vue en cours.
   A priori le changement de variable n'étant pas bijectif, nous allons être confronté au choix d'une branche inverse $\wp^{-1}$ c'est-à-dire une zacine de Q. Plaçons sur un domaine simplement connexe sur lequel Q ne s'annulle pas de sorte qu'on puisse choisir une telle racine, on choisit telle que $\frac{d\wp}{dw} = \sqrt{Q(\wp)}$.

   $$\sqrt{Q(z)}\frac{d}{dz} = \frac{d}{dw} \quad \text{et} \quad Q(z)\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}\sqrt{Q}\frac{d}{dz} = \frac{d^2}{dw^2}$$

et notre équation devient

$$\frac{d^2u}{dw^2} - (n(n+1)\wp(w) + b)u = 0$$

3. Les singularités de l'équation en la variable z sont-elles images par $\wp$ des singularités de l'équation en la variable w ?

   NON

   Notre nouvelle équation a des singularités sur le réseau des périodes de $\wp$. L'image des singularités par $\wp$ est donc réduit à ∞. il manque les 3 autres singularités.

   Le changement de variable les a désingularisé.

4. Résoudre l'équation de Lamé dans la cas $n = 0$.

   Lorsque $n = 0$ nous obtenons $\frac{d^2u}{dw^2} - bu = 0$ dont une base de solution est $e^{\pm\sqrt{b}w}$. Dans la variable initiale, une base de solutions est donc

$$\exp(\pm\sqrt{b}\int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}).$$